1. Liczby rzeczywiste

Zbiór **liczb rzeczywistych** oznaczamy literą **R**.

Liczby naturalne to liczby: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Zbiór liczb naturalnych oznaczamy literą **N**. Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Początkowe liczby pierwsze to: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Liczby całkowite to liczby naturalne dodatnie: $1, 2, 3, 4, \ldots$, liczby do nich przeciwne: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ oraz liczba 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy literą **C**.

Liczby wymierne to liczby mające postać $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{C}$ oraz $n \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy literą **W**. Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego **skończonego** lub **nieskończonego okresowego**.

Liczby niewymierne to liczby rzeczywiste, które nie są wymierne. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy literami **NW**.

Potęga o wykładniku całkowitym

$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0, n \in \mathbf{N}$

Potęga o wykładniku wymiernym

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0, n \in \mathbf{N}, n > 1$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ dla $a > 0, n \in \mathbf{N}, n > 1, m \in \mathbf{C}$

Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{R}$:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$

Działania na pierwiastkach

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a, b \geqslant 0$ $\quad \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0, b > 0$ $\quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $b \neq 0$

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

odpowiedzi – s. 156

1. Dana jest liczba sześciocyfrowa $65432x$, gdzie x oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę, jeśli jest ona podzielna przez:

a) 3, b) 4, c) 5, d) 8, e) 9.

2. Podaj przykład liczby wymiernej x spełniającej podany warunek.

a) $\frac{3}{4} < x < \frac{11}{12}$ b) $\frac{5}{6} < x < \frac{9}{10}$ c) $\frac{3}{4} < x < \frac{4}{5}$ d) $0{,}25 < x < \frac{1}{3}$

3. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

a) $\sqrt{72} + \sqrt{32} + \sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{432}$ e) $\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{27}}{\sqrt{12}}$

b) $2\sqrt{75} - 2\sqrt{3} + \sqrt{300}$ d) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{4}\right)$ f) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{24}\right)}{\sqrt{3}}$

4. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}} - \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$ c) $\sqrt[3]{2\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{-1\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{1\frac{7}{9}} \cdot \sqrt[3]{-1\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} + \sqrt[3]{-\frac{216}{125}} - \sqrt[5]{-\frac{243}{32}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{-6}} + \frac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{-2}} - \frac{\sqrt[3]{-320}}{\sqrt[3]{-5}}$

5. Dla jakiej liczby naturalnej n jest spełniony warunek $n - 1 \leqslant x < n$?

a) $x = \frac{3^{32} - 3^{30}}{3^{28}}$ b) $x = \frac{2^{22} + 2^{21}}{3 \cdot 2^{11}}$ c) $x = \frac{5^{14} - 5^{12}}{5^{13} + 5^{12}}$

6. Oblicz.

a) $\frac{2^8 - 4^3}{16^2 + 8^2}$ b) $\frac{3^5 + 27^2}{9 \cdot 3^5}$ c) $\frac{5^8 : 5^2 - 125^2}{25^{-3} : 5^{-2}}$

7. Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

a) $\frac{(6 \cdot 10^{21}) \cdot (4{,}4 \cdot 10^2)}{2 \cdot 10^4}$ b) $\frac{(3 \cdot 10^{11}) \cdot (6 \cdot 10^4)}{(1{,}5 \cdot 10^3) \cdot (4 \cdot 10^5)}$ c) $\frac{3 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5}{(2 \cdot 10^4) \cdot (3 \cdot 10^2)}$

8. Oblicz.

a) $(2 - 3\sqrt{3})(2 - 3\sqrt{3})$ c) $(4\sqrt{5} + \sqrt{3})(4\sqrt{5} - \sqrt{3})$ e) $(\sqrt{6} - 3\sqrt{3})^2$

b) $(7 + 5\sqrt{2})(5\sqrt{2} + 7)$ d) $(\sqrt{8} + 2\sqrt{6})(2\sqrt{6} - \sqrt{8})$ f) $(2\sqrt{32} - 3\sqrt{2})^2$

9. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych x i y.

a) $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$ b) $x = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

10. Jaka cyfra znajduje się na piętnastym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

a) 0,(3210) b) 6,(3648) c) 4,3(201) d) 1,29(325)

11. Wykonaj działania. Wynik podaj w najprostszej postaci.

a) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 + (2-x)^2$

b) $2(3+x)^2 - (2-x)^2 - 3(2-x)(2+x)$

c) $(4x - 3y)(4x + 3y) - 2(4x + 3y)^2 + 2(3x - 4y)^2$

12. Uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanego x.

a) $(\sqrt{2} - x)^2 - (2x^3 + 1)(2x^3 - 1)$, $x = \sqrt{2}$

b) $(x+2)^2 - (3x+2)(2-3x) - (\sqrt{3} + x)^2$, $x = \sqrt{3}$

c) $(x-3)^2 + \sqrt{5}(2x + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2x) - (1-x)^2$, $x = -\sqrt{5}$

13. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{3}{\sqrt{3} - 1}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$ e) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{2} + 3}$ d) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} - 2}$ f) $\frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ h) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} + 1}$

14. Oblicz.

a) $\frac{(3 + \sqrt{5})^2 - (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)}$ c) $\left(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} + 3}\right)^2$

b) $\frac{(1 + \sqrt{12})^2 - (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{8} - 2)(2 + 2\sqrt{2})}$ d) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2$

15. Oblicz wartość wyrażenia $xy^{-2} - \frac{4}{5}z^{-1}$ dla $x = 3{,}(3)$, $y = 0{,}(5)$ i $z = 0{,}(9)$.

16. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych a i b, dla których zachodzi równość $a^2 - b^2 = 24$.

17. Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb:

a) naturalnych jest liczbą nieparzystą,

b) nieparzystych nie jest liczbą podzielną przez 4.

18. Wykaż, że podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich x i y.

a) $2xy \leqslant x^2 + y^2$ b) $\frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

19. Wyznacz x, jeżeli:

a) 20% liczby 30 jest równe 30% liczby x,

b) 5% liczby 8 jest równe 4% liczby x,

c) 110% liczby 24 jest równe 44% liczby x.

20. Bilet lotniczy z Gdańska do Nowego Jorku kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby jego cena, gdyby cenę obecną:

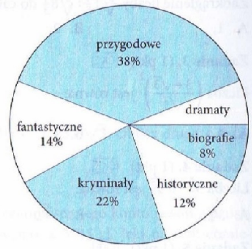
a) podniesiono o 15%, a następnie obniżono o 15%,

b) obniżono o 20%, a następnie podniesiono o 20%,

c) podniesiono o 25%, a następnie obniżono o 20%?

21. Kostium kąpielowy w lipcu kosztował 80 zł, w sierpniu obniżono jego cenę o 12%, a we wrześniu nastąpiła kolejna obniżka, tym razem o 10%. Jaka była cena kostiumu po obu obniżkach? Ile kosztowałby, gdyby jego cenę obniżono raz, o 22%?

22. Na diagramie przedstawiono wyniki ankiety przeprowadzonej wśród uczniów, którzy odpowiadali na pytanie: „Jakie książki czytasz najczęściej? Wybierz jeden rodzaj."



a) Ile procent spośród ankietowanych uczniów najczęściej czyta dramaty?

b) Oblicz, ilu uczniów brało udział w ankiecie, wiedząc, że książki fantastyczne najczęściej czyta 21 spośród nich.

c) O ile procent więcej uczniów częściej czyta książki historyczne niż biografie?

23. Bydgoszcz jest ósmym miastem w Polsce pod względem liczby ludności. W 2002 roku w tym mieście mieszkało 372 104 osób, a 10 lat później – 363 926 osób.

a) O ile procent mniej mieszkańców miała Bydgoszcz w 2012 roku niż w 2002 roku?

b) O ile procent więcej mieszkańców miała Bydgoszcz w 2002 roku niż w 2012 roku?

Wynik podaj z dokładnością do 1‰.

24. W roku 2010 w województwie kujawsko-pomorskim zameldowanych było 2 069 575 mieszkańców, w tym 998 266 mężczyzn.

a) O ile punktów procentowych więcej kobiet niż mężczyzn mieszkało w tym województwie?

b) O ile procent więcej kobiet niż mężczyzn mieszkało w tym województwie?

Zestaw B. Zadania zamknięte

odpowiedzi – s. 156

Wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (1 pkt)
Dana jest piętnastocyfrowa liczba 211 111 111 111 $1x2$. Jeśli ta liczba jest podzielna przez 12, to cyfrą x jest:

A. 7, **B.** 5, **C.** 3, **D.** 1.

Zadanie 2. (1 pkt)
Zaokrąglenie liczby $\sqrt[3]{1\frac{4}{5}} : \sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$ do całości jest równe:

A. 1, **B.** 2, **C.** 3, **D.** 4.

Zadanie 3. (1 pkt) CKE
Liczba $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa:

A. 4, **B.** 9, **C.** $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$, **D.** $4+2\sqrt{3}$.

Zadanie 4. (1 pkt) CKE
Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa:

A. 3^3, **B.** $3^{\frac{32}{9}}$, **C.** 3^4, **D.** 3^5.

Zadanie 5. (1 pkt) CKE
Wskaż równość prawdziwą.

A. $-256^2 = (-256)^2$
B. $256^3 = (-256)^3$
C. $\sqrt{(-256)^2} = -256$
D. $\sqrt[3]{-256} = -\sqrt[3]{256}$

Zadanie 6. (1 pkt) CKE
W klasie jest cztery razy więcej chłopców niż dziewcząt. Ile procent wszystkich uczniów tej klasy stanowią dziewczęta?

A. 4% **B.** 5% **C.** 20% **D.** 25%

Zadanie 7. (1 pkt)
Jakim procentem liczby 6 jest 30% liczby 5?

A. 20% **B.** 25% **C.** 36% **D.** 40%

Zadanie 8. (1 pkt)
Michał chce wpłacić kwotę k zł na lokatę roczną. Bank A oferuje lokatę oprocentowaną 5% rocznie, a bank B lokatę oprocentowaną 6% rocznie. Jeśli Michał zdecyduje się na bank A, to po roku otrzyma odsetki w wysokości x zł, a jeśli zdecyduje się na bank B, to odsetki wyniosą y zł. Prawdziwa jest zależność:

A. $y = 101\%x$, **B.** $y = 110\%x$, **C.** $y = 120\%x$, **D.** $y = 150\%x$.

Zestaw C. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

odpowiedzi i modele – s. 156

Zadanie 1. (2 pkt)
Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej x liczba $2x^2+4x+10$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 2. (2 pkt) CKE
Uzasadnij, że liczba $4^{12}+4^{13}+4^{14}$ jest podzielna przez 42.

Zadanie 3. (2 pkt)
Wykaż, że liczba $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2+4\sqrt{3}$ jest naturalna.

Zadanie 4. (2 pkt)
Uzasadnij, że liczba $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ jest wymierna.

Zadanie 5. (2 pkt)
Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości: $3\sqrt{3}-1$ i $3+\sqrt{3}$. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Zadanie 6. (2 pkt)
Pan Lewandowski zarabia miesięcznie 3500 zł netto. W grudniu na jego konto razem z pensją wpłynął dodatek świąteczny, a kwota, którą otrzymał, wyniosła 3745 zł. Jaki procent comiesięcznej pensji stanowił dodatek świąteczny?

Zadanie 7. (2 pkt) CKE
Dany jest prostokąt o bokach a i b oraz prostokąt o bokach c i d. Długość boku c to 90% długości boku a. Długość boku d to 120% długości boku b. Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach a i b stanowi pole prostokąta o bokach c i d.

Zadanie 8. (2 pkt) CKE
Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

Zadanie 9. (2 pkt) CKE
Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2+y^2 \geqslant 2xy$.

Zadanie 10. (2 pkt) CKE
Wykaż, że jeśli $a>0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geqslant \frac{a+1}{2}$.

Zadanie 11. (2 pkt)
Wiedząc, że $\frac{1}{a}+a=14$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}$.

Zestaw D. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

odpowiedzi – s. 156
modele – s. 157

Zadanie 1. (4 pkt)
Dane są liczby $x=\frac{3^{11}+27^4}{4\cdot 9^4}$ i $y=\sqrt{\sqrt{4\sqrt{81}}+\sqrt{25\sqrt{16}}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}}$. Porównaj liczby $2x^{-1}$ i y^{-2}.

Zadanie 2. (4 pkt)
Wyrażenie $(x+3y)^2-(x+3y)(3y-x)-(x-3y)^2-y(6x-9y)$ doprowadź do najprostszej postaci, a następnie sprawdź, czy jego wartość dla $x=-\sqrt{2}$ i $y=\frac{1}{3}$ jest liczbą ujemną.

Zadanie 3. (5 pkt)
Uporządkuj rosnąco liczby:

$$a=\sqrt[3]{2\tfrac{10}{27}}\cdot\left(\tfrac{4}{3}\right)^{-2},\quad b=-0{,}5^2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-1},\quad c=\sqrt[3]{-\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2},\quad d=\frac{0{,}3^{-1}\cdot 0{,}4^2}{2{,}5^{-1}}.$$

Zadanie 4. (4 pkt)
Liczby $a=\left(\frac{2^3}{5}\right)^{-1}-2^{-2}\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^0$ i $b=\left(\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2-2^{-3}}\right):\sqrt{8\sqrt{64}}$ zapisz w postaci dziesiętnej. Podaj zaokrąglenia liczb a i b z dokładnością do części dziesiętnych.

Zadanie 5. (3 pkt) CKE
Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1}<2^{26}$.

Zadanie 6. (4 pkt)
W kwadracie dwa równoległe boki wydłużono o 25%, a pozostałe dwa skrócono o p%. Powstał prostokąt, którego pole jest o 20% większe od pola kwadratu. Oblicz p.

Zadanie 7. (4 pkt)
W hurtowni jest 3200 telewizorów, z których 3% ma pewne usterki. Ile wadliwych telewizorów należy usunąć, aby w hurtowni pozostało mniej niż 1% odbiorników z usterkami?

Zadanie 8. (4 pkt) CKE
W pewnej klasie liczba dziewcząt stanowi 60% liczby uczniów. Gdy 6 dziewcząt wyjechało na mecz siatkówki, w klasie pozostało tyle samo chłopców, ile dziewcząt. Oblicz, ile osób liczy ta klasa oraz ilu jest w niej chłopców.

Zadanie 9. (3 pkt) CKE
Koncern paliwowy dwukrotnie w jednym tygodniu podnosił cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, drugi raz o 5%. Po obu podwyżkach jeden litr benzyny wyprodukowanej przez ten koncern kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed podwyżkami.

1. LICZBY RZECZYWISTE

ZADANIA KROK PO KROKU

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1 Cyfra dziesiątek iloczynu wszystkich liczb pierwszych mniejszych od 12 to:

A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

2 Ile różnych reszt można otrzymać, dzieląc kwadrat dodatniej liczby naturalnej przez 8?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

3 Na przystanku stało 25 osób. Wśród nich było 14 osób z zielonymi włosami, 19 – z różowymi okularami, a 13 – z zielonymi włosami i różowymi okularami. Jaka część wszystkich osób stojących na przystanku nie miała ani różowych okularów, ani zielonych włosów?

A. 0,5 B. 0,2 C. 0,4 D. 0,84

4 Odwrotnością liczby $c=0,(2)+\frac{4}{36}$ jest liczba:

A. 3 B. 2 C. $\frac{45}{14}$ D. $\frac{27}{2}$

5 Prawdą jest, że:

A. $3\sqrt{2}\leq 2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{16}>2\sqrt{4}$
C. $\sqrt{50}-3\sqrt{2}=\sqrt{32}$ D. $\sqrt{27}\geq 3\sqrt{3}$

6 Rosnąco uporządkowane są liczby:

A. $\pi, 3{,}14, 3{,}1(4)$ B. $3{,}1(4), \pi, 3{,}14$
C. $\pi, 3{,}1(4), 3{,}14$ D. $3{,}14, \pi, 3{,}1(4)$

7 Liczba $2^{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[5]{4^4}$ jest równa:

A. $2^{\frac{1}{5}}$ B. 2^5 C. 2^2 D. 2^4

8 Liczbę 180 rozłożono na czynniki pierwsze. Suma tych czynników jest równa:

A. 9 B. 10 C. 12 D. 15

9 Cyfra, która znajduje się na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby 0,3(201), to:

A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

10 Liczba $a=5\cdot 2^{40}+3\cdot 4^{20}$ jest równa:

A. 2^{45} B. 2^{43} C. 2^{44} D. 2^{48}

11 Przyjmijmy, że masa mrówki jest równa 3 mg, a masa słonia 3 t. Ile razy słoń jest cięższy od mrówki?

A. 10^9 B. 10^3 C. 10^{18} D. 10^{-9}

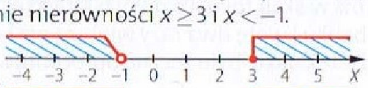
12 Liczba przeciwna do liczby $k=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ to liczba:

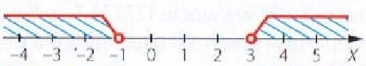
A. -2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}-2$ D. 2

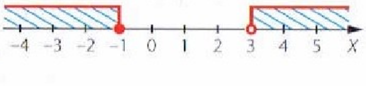
13 Zbiór liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają warunek $-2<x<7$ i $x\leq 5$, to:

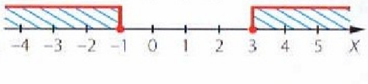
A. $\langle -2,5)$ B. $(-\infty,5\rangle$ C. $(-2,5\rangle$ D. $\langle -2,7)$

14 Wskaż rysunek, na którym przedstawiono zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają jednocześnie nierówności $x\geq 3$ i $x<-1$.

A. 

B. 

C. 

D. 

15 Wiadomo, że $a=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$. Liczbą naturalną jest zatem:

A. $a+1$ B. $a-\sqrt{3}$ C. $a+1-\sqrt{3}$ D. $a+\sqrt{3}-1$

16 Cenę towaru najpierw podwyższono o 40%, a następnie obniżono o 40%. Wynika z tego, że cena towaru po dwukrotnej zmianie cen:

A. jest równa cenie początkowej B. zmniejszyła się o 16%
C. zmniejszyła się o 20% D. zwiększyła się o 20%

17 Brzoza w ciągu roku urosła o 80%, a sosna o 50%. Teraz oba drzewa mają tę samą wysokość. O ile procent sosna była na początku wyższa od brzozy?

A. o 20% B. o 40% C. o 30% D. o 10%

18 Liczba $\log 18$ jest równa:

A. $3\log 2-\log 3$ B. $2\log 3+\log 2$ C. $\log 28-\log 10$ D. $\log 10+\log 8$

19 Liczba $k=\log_2(\log_9 3)+2^{\log_2 5}$ jest liczbą:

A. parzystą B. nieparzystą C. ujemną D. niewymierną

20 Wiadomo, że $\dfrac{\sqrt[3]{2^6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{0{,}5\cdot 4^2}=2^b$. Wynika z tego, że:

A. $b=-1$ B. $b=2$ C. $b=1$ D. $b=0$

ZADANIA OTWARTE KRÓTKIEJ ODPOWIEDZI

21 Wyznacz wszystkie ułamki właściwe o mianowniku 11 zawarte między liczbami $\frac{3}{7}$ i $\frac{4}{7}$.

22 Wykaż, że liczba $5^{2015}+3\cdot 5^{2014}-5^{2013}$ jest podzielna przez 13.

23 Wykaż, że liczba $a=11^{2015}+3^{2018}$ jest liczbą złożoną.

24 Znajdź liczbę a spełniającą warunek $2\left(7-2\sqrt{5}\right)-\left(3-\sqrt{5}\right)^2=a\sqrt{45}$.

25 Wykaż, że liczba $k=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ jest wymierna.

26 Wiedząc, że $(256)^a=\sqrt[3]{2}$, oblicz $(6a)^{-\frac{1}{2}}$.

27 Wiadomo, że $\frac{6}{9}=0{,}(6)$ i $m=0{,}1(6)$. Oblicz błąd względny, jaki popełniono, zaokrąglając liczbę m do dwóch miejsc po przecinku.

28 Porównaj liczby 7^{20} i 5^{30}.

29 Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\left(3^{-1}+2^{-1}\right)\sqrt[3]{-64}}{-(0{,}75)^{-2}\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^2}$. Określ, jakim procentem licznika jest mianownik otrzymanego ułamka.

30 Wiadomo, że $\log_2 24=b$. Oblicz $\log_2 9$.

ZADANIA OTWARTE ROZSZERZONEJ ODPOWIEDZI

31 Pan A wpłacił pieniądze na lokatę, której oprocentowanie wynosi 6% w skali roku. Po dwóch latach oszczędzania otrzymał odsetki w kwocie 1272 zł. Pan B wpłacił do innego banku kwotę dwa razy większą niż kwota wpłacona przez pana A i po roku oszczędzania otrzymał 1400 zł odsetek. Jakie było roczne oprocentowanie w banku pana B?

32 Liczbę $a=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$ zapisz w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.

33 Liczba a jest najmniejszą liczbą naturalną dodatnią, która w dzieleniu przez 11 daje resztę 1 i w dzieleniu przez 13 również daje resztę 1. Liczba b jest liczbą naturalną dodatnią.

Wyznacz wszystkie ułamki właściwe postaci $\frac{b}{\sqrt{a}}$, które mają rozwinięcie dziesiętne skończone.

34 Jeden bok kwadratu zwiększono o 20%, a drugi zmniejszono o 20%. Pole tak otrzymanego prostokąta jest równe 96. Oblicz obwód tego prostokąta.

35 Dana jest liczba $p=2^{\log 2+\log 4+\log 5+\log 25}$. Znajdź liczbę a, dla której ciąg $\left(p^{\frac{1}{3}},(2p)^{\frac{1}{2}},p^a\right)$ jest ciągiem geometrycznym.

36 Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{3^{20}+1}+\sqrt{3^{20}-1}<2\cdot 3^{11}$.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1 Liczba $\left[\sqrt[3]{-27}\cdot 81^{-\frac{3}{4}}\right]^{-1}$ jest równa:

A. $-\frac{1}{9}$ B. -9 C. 9 D. $\frac{1}{9}$

2 Iloczyn $8^{-2}\cdot 2^4$ jest równy:

A. 4^1 B. 2^2 C. 2^{-1} D. 4^{-1}

3 Wiadomo, że $a=\log_{\frac{1}{2}} 8+\log 100$. Wynika z tego, że:

A. $a+1=0$ B. $a-1=0$ C. $a+2=0$ D. $a-2=0$

4 Liczba $\dfrac{\log 25+\log 4}{\log 20-\log 2}$ jest:

A. kwadratem liczby naturalnej B. podzielna przez 3
C. podzielna przez 5 D. liczbą pierwszą

5 Wiadomo, że $a=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$. Wówczas wymierna jest liczba:

A. $\dfrac{a}{2-\sqrt{3}}$ B. $a\left(2-\sqrt{3}\right)$ C. $a+\left(2-\sqrt{3}\right)$ D. $a-\left(2-\sqrt{3}\right)$

6 Cenę stołu obniżono o 40%, a po pewnym czasie nową cenę obniżono o dalsze 30%. W wyniku obu obniżek wyjściowa cena stołu zmniejszyła się:

A. o 70% B. o 50% C. o 42% D. o 58%

7 Pierwsza rata stanowi 5% ceny talerzy i wynosi 120 zł. Pozostałą kwotę podzielono na 5 równych rat. Jedna z tych rat wynosi:

A. 480 zł B. 240 zł C. 456 zł D. 432 zł

8 Długość przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równoramiennego T jest o 20% większa od długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równoramiennego t. Pole trójkąta T jest zatem większe od pola trójkąta t:

A. o 40% B. o 44% C. o 20% D. o 12%

9 Równość $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{-4}=5^m\cdot 5^{-1}$ jest spełniona dla:

A. $m=-1$ B. $m=1$ C. $m=-2$ D. $m=0$

10 Liczba a stanowi 25% liczby b. Liczba b stanowi 120% liczby c. Jeśli $c=6\frac{2}{3}$, to:

A. $b-a=6$ B. $a-b=6$ C. $ab=6$ D. $\frac{b}{a}=6$

ZADANIA OTWARTE KRÓTKIEJ ODPOWIEDZI

11 Wykaż, że liczba $125^{11}+25^{16}+4\cdot 5^{31}$ jest podzielna przez 17.

12 Uzasadnij, że liczba $\dfrac{7}{1-2\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{-1}$ jest wymierna.

13 Oblicz wartość wyrażenia $W=\dfrac{xy}{x-y}$ dla $x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{20}$.

14 Wykaż, że jeśli $a>0$, to $\dfrac{\left(a^{-2}\right)^3\cdot\sqrt{a^3}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\cdot a^{-4}}=a^{-2}$.

15 Rozwiąż równanie $\frac{x^3}{x^{-2}}-2=30$.

16 Niech S będzie sumą wszystkich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 15 jest równa 4. Wykaż, że reszta z dzielenia sumy tych liczb przez 15 jest równa 9.

17 W poniedziałek bilet do kina kosztuje 15 zł, a we wtorek 21 zł. Oblicz, o ile procent bilet do kina jest droższy we wtorek niż w poniedziałek.

18 Wykaż, że liczba $3\log 2-2\log 4$ jest ujemna.

19 Wiadomo, że $\log_3 2=m$. Oblicz $\log_3 12$.

20 Wykaż, że liczba $M=\frac{3^{-1}}{\sqrt[3]{9}\cdot 3^{\frac{4}{3}}}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2$ jest wymierna.

21 Znajdź cyfrę jedności liczby $K=11^{101}+3^{100}+9^{99}$.

22 Porównaj liczby 6^{50} i 8^{40}.

ZADANIA OTWARTE ROZSZERZONEJ ODPOWIEDZI

23 Rozwiąż równanie $\frac{x\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=x-2\sqrt{3}$.

24 Cenę towaru p obniżono dwukrotnie, za każdym razem o 4%. Oblicz p, jeśli cena towaru po dwukrotnych obniżkach wynosiła 1704,96 zł.

25 Wiadomo, że $\log_m 8=3$ i $\log_{25} k=\frac{1}{2}$, gdzie $m>1$ i $k>1$. Oblicz $\log m^3+\log k^3$.

26 Uzasadnij, że:

a) $2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}=\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{50}+\sqrt{18}}$

b) liczba $M=\sqrt{\frac{0,(4)+0,(6)+0,(8)}{8}}$ należy do przedziału $(-1,1)$

c) $\left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{4}}>\left(3\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$

27 Wykaż, że:

a) dla dowolnych liczb $a,b\in R_+$ prawdziwa jest równość $\log\frac{a}{b}-\log\frac{b}{a}=2(\log a-\log b)$,

b) suma czterech kolejnych potęg liczby 3 jest podzielna przez 5 i przez 8.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. B **2.** D **3.** A **4.** D **5.** A **6.** D **7.** C **8.** B **9.** D **10.** A

11. $125^{11}+25^{16}+4\cdot 5^{31}=5^{33}+5^{32}+4\cdot 5^{31}=5^{31}(25+5+4)=5^{31}\cdot 2\cdot 17$

12. $\frac{7}{1-2\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{-1}=\frac{7\left(1+2\sqrt{2}\right)}{1-8}+2\sqrt{2}=-1\in W$

13. $W=-2\sqrt{5}$

14. Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia o mnożeniu oraz dzieleniu potęg o tych samych podstawach.

15. $x=2$

16. Wskazówka: te liczby to 19, 34, 49, 64, 79 i 94.

17. O 40%.

18. Wskazówka: liczba ta jest równa $-\log 2$.

19. $2m+1$

20. $M=\frac{1}{9}$

21. 1. Wskazówka: $1+1+9=11$

22. $6^{50}>8^{40}$

23. $x=6$

24. 1850 zł

25. 3

26. Wskazówka:

a) Obie strony równości są równe 0.

b) $M=\frac{1}{2}$

c) $\left(2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\sqrt{12}\right)^{\frac{9}{12}}$ $\quad\left(3\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt{12}\right)^{\frac{8}{12}}$

27. a) $\log\frac{a}{b}-\log\frac{b}{a}=\log\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=2\log\frac{a}{b}=2(\log a-\log b)$

b) $3^n+3^{n+1}+3^{n+2}+3^{n+3}=3^n(1+3+9+27)=3^n\cdot 5\cdot 8$

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

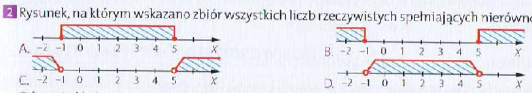
1 Liczba odwrotna do liczby $a=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\sqrt{2}$ to liczba:

A. $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{3-\sqrt{2}}{14}$ C. $6+3\sqrt{2}$ D. $\frac{2-7\sqrt{2}}{6}$

Odpowiedź: B

Teoria strona: 252

2 Rysunek, na którym wskazano zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|x-2|\leq 3$, to:



Odpowiedź: A

Teoria strona: 254

3 Liczba $b=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$ jest równa:

A. 2 B. $2+\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

Odpowiedź: D

Teoria strona: 253

4 Dla $a=\log 2$ i $b=\log 5$ wyznacz logarytm dziesiętny z liczby 250.

Odpowiedź: $a+3b$

Teoria strona: 256

5 Każdy bok prostokąta o wymiarach 12 dm i 8 dm zwiększono o 10 cm. O ile procent zwiększy się obwód tego prostokąta, a o ile procent zwiększy się jego pole?

Odpowiedź: Obwód zwiększy się o 10%, a pole zwiększy się o $21\frac{7}{8}$%.

Teoria strona: 249

6 Liczba $a=\log_7 5+2\log_7 5$ jest równa:

A. $\log_7 125$ B. $\log_7 30$ C. $\log_7 25$ D. $\log_7 15$

2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

ZADANIA KROK PO KROKU

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1 Liczby a, b są liczbami rzeczywistymi, takimi że $a \neq -1$, $b \neq 1$ i $b = \frac{a-1}{a+1}$. Zatem:

A. $a = \frac{b}{1-b}$ B. $a = \frac{b+1}{1-b}$ C. $a = \frac{1-b}{b}$ D. $a = \frac{1+b}{b-1}$

2 Wyrażenie $W = \frac{(x^2)^{-1} \cdot (\sqrt{x})^3}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2}$ dla $x \neq 0$ po uproszczeniu ma postać:

A. $x^{-\frac{1}{2}}$ B. $x^{\frac{1}{2}}$ C. x D. x^{-1}

3 Zmieszano x kilogramów a-procentowego roztworu soli kuchennej z y kilogramów roztworu b-procentowego. Ilu procentowy jest otrzymany roztwór?

A. $\frac{xa+yb}{x+y}\%$ B. $\frac{xa}{yb}\%$ C. $\frac{xa-yb}{x-y}\%$ D. $\frac{x+y}{a+b}\%$

4 Cenę towaru podwyższono o $p\%$. Obecnie towar ten kosztuje t zł. Przed podwyżką kosztował on:

A. $\frac{100p}{100+t}$ zł B. $\frac{100t}{p-100}$ zł C. $\frac{pt}{100+p}$ zł D. $\frac{100t}{100+p}$ zł

5 Odległość z miasta A do miasta B samochód osobowy przebywa w ciągu a godzin. Samochód ciężarowy tę samą odległość pokonuje w ciągu b godzin. Pewnego dnia samochody te równocześnie wyruszyły naprzeciw siebie z miast odpowiednio A i B. Po ilu godzinach się spotkały?

A. po $\frac{a+b}{ab}$ godzinach B. po $\frac{ab}{a+b}$ godzinach

C. po $\frac{a+b}{2}$ godzinach D. po $\frac{ab}{2}$ godzinach

6 Liczba n jest liczbą naturalną dodatnią. Która z liczb nie jest liczbą naturalną?

A. $\frac{10^n-4}{6}$ B. $\frac{10^n+4}{2}$ C. $\frac{10^n-2}{3}$ D. $\frac{10^n+8}{9}$

7 Średnia arytmetyczna liczb $2, a, a+2$ jest równa 4. Wówczas:

A. $a-1=-5$ B. $a-1=2$ C. $a-1=-3$ D. $a-1=3$

8 Średnia arytmetyczna liczb a^2 i b^2 jest równa ab. Wynika z tego, że:

A. $a=2b$ B. $a=b$ C. $a=-b$ D. $a=\frac{b}{2}$

9 Wyrażenie $W = 16-(x-1)^4$ rozłożone na czynniki ma postać:

A. $W=(3-x)(3+x)(x^2+2x-5)$ B. $W=(3-x)(1+x)(x^2-2x+5)$

C. $W=(1-x)(1+x)(x^2-2x+5)$ D. $W=(3-x)(1+x)(x^2+2x-5)$

10 Wiadomo, że $\log_5 x = -2$ i $\log_5 y = 2$. Wówczas:

A. $xy=1$ B. $xy<1$ C. $xy>1$ D. $xy=5$

11 Wiadomo, że $a=\sqrt{3\sqrt{5}-3}$, $b=\sqrt{3\sqrt{5}+3}$. Liczba ab należy zatem do przedziału:

A. $(-\infty, -6)$ B. $(-6, 5)$ C. $(5, 8)$ D. $(8, +\infty)$

12 Dane są liczby a, b spełniające warunek $a^2 \geq b$. Wtedy wyrażenie $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ jest równe:

A. 1 B. $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ C. $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ D. $a-\sqrt{b}$

13 Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(x+\sqrt{2})^2-(x\sqrt{2}-1)(1+x\sqrt{2})+(x-\sqrt{2})^2$ ma wartość:

A. 5 B. 2 C. -1 D. $2\sqrt{2}$

14 Wiadomo, że $\sqrt{x^2}=|x|$. Dla $x<0$ wyrażenie $\frac{\sqrt{x^2}+x}{x}$ po uproszczeniu jest zatem równe:

A. x B. 2 C. -1 D. 0

15 Jeśli liczby $p_1, p_2, ..., p_n$ są liczbami pierwszymi, liczby $a_1, a_2, ..., a_n$ są liczbami naturalnymi i liczbę naturalną n można zapisać w postaci $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$, to liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby n jest równa $(a_1+1)(a_2+1) \cdot ... \cdot (a_n+1)$. Ile zatem dzielników naturalnych ma liczba $m = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2$?

A. 40 B. 20 C. 90 D. 60

16 Liczby $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, takimi że $a_1+a_2+...+a_{10}=a$ i $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{10} = 1024$. Wtedy:

A. $a \leq 10$ B. $a<20$ C. $a \geq 100$ D. $a \geq 20$

17 Wartość wyrażenia $-1-2-3+4-...+(-1)^n \cdot n$ jest liczbą ujemną, gdy:

A. n jest liczbą nieparzystą B. n jest liczbą parzystą

C. n jest liczbą pierwszą D. n jest liczbą większą od 10

18 Wiadomo, że $x+y=4$ i $x^2+y^2=40$. Wtedy wyrażenie $\frac{xy}{4}$ ma wartość:

A. -2 B. 12 C. -36 D. -3

19 Różnica kwadratów wyrażeń $x-2y$ i $x+2y$ wynosi:

A. $-8xy$ B. $4xy$ C. x^2-y^2 D. $4x^2-4y^2$

20 Wiadomo, że $k+(x-3)(x+4)=x(x-3)+4(x+4)$. Wynika z tego, że liczba k jest równa:

A. 4 B. 28 C. -4 D. 16

ZADANIA OTWARTE KRÓTKIEJ ODPOWIEDZI

21 Reszta z dzielenia liczby a przez 17 jest równa 4. Reszta z dzielenia liczby b przez 17 jest równa 9. Oblicz resztę z dzielenia przez 17 liczby ab.

22 Dane są dodatnie liczby naturalne a, b, niepodzielne przez 13. Wiedząc, że liczba $T=3a+7b$ jest podzielna przez 13, sprawdź, która z liczb $M=\frac{12a+41b}{13}$ czy $N=\frac{12a+39b}{13}$ jest liczbą całkowitą.

23 Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest równa 3.

24 Wykaż, że dla $n \in N_+$ liczba $A=2^{n+3}+2^n-9 \cdot 3^n$ jest wielokrotnością liczby 9.

25 Wyznacz wszystkie liczby całkowite n, dla których liczba $\frac{3n+1}{n-1}$ jest całkowita.

26 Wiedząc, że $a \neq 0$ i $\frac{1}{a}+a=5$, oblicz $a^2+\frac{1}{a^2}$.

27 Wykaż, że jeśli $k>0$, to $\frac{2}{k+2} > \frac{k+2}{k^2+4}$.

28 Wykaż, że jeżeli $a>0$, to $a^2+\frac{54}{a} \geq 27$.

29 Wykaż, że jeśli $x>0$, $y>0$, to $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$.

30 Uzasadnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność $a^2+b^2+c^2 \geq 2(a+b+c-1{,}5)$.

ZADANIA OTWARTE ROZSZERZONEJ ODPOWIEDZI

31 Wiadomo, że a, b są takimi liczbami rzeczywistymi, że $a-b=7$ i $a^2+b^2=29$. Wyznacz a^4+b^4.

32 Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c spełniona jest nierówność $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

33 Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d spełniona jest nierówność $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

34 Uzasadnij, że nie istnieją liczby naturalne dodatnie a, b spełniające warunek $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}=1$.

35 Ile jest czwórek kolejnych liczb naturalnych dodatnich a, b, c, d takich, że liczba $abcd+1$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej?

ROZWIĄZANIA ZADAŃ KROK PO KROKU

ZADANIA ZAMKNIĘTE

ZADANIE 1

Liczby a, b są liczbami rzeczywistymi, takimi że $a \neq -1$, $b \neq 1$ i $b = \frac{a-1}{a+1}$. Zatem:

A. $a = \frac{b}{1-b}$ B. $a = \frac{b+1}{1-b}$ C. $a = \frac{1-b}{b}$ D. $a = \frac{1+b}{b-1}$

ROZWIĄZANIE

Przekształcamy wyrażenie tak, aby wyznaczyć a. Mnożymy obie strony wyrażenia przez $a+1$, zamieniamy iloczyn na sumę i przenosimy wyrazy zawierające a na lewą stronę równości, a pozostałe wyrazy – na prawą stronę równości.	$b=\frac{a-1}{a-1}$ $b(a+1)=a-1$ $ba+b=a-1$ $ba-a=-1-b$ $a(b-1)=-1-b$
Wyłączamy przed nawias a i dzielimy obie strony równości przez wyrażenie stojące przy a (wyrażenie to jest różne od 0, bo $b \neq 1$).	$a=\frac{-1-b}{b-1}=\frac{-(1+b)}{-(1-b)}$ $a=\frac{1+b}{1-b}$

ODPOWIEDŹ: B

ZADANIE 2

Wyrażenie $W = \frac{(x^2)^{-1} \cdot (\sqrt{x})^3}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2}$ dla $x \neq 0$ po uproszczeniu ma postać:

A. $x^{-\frac{1}{2}}$ B. $x^{\frac{1}{2}}$ C. x D. x^{-1}

ROZWIĄZANIE

Wykonujemy potęgowanie w liczniku i mianowniku. Zapisujemy potęgi za pomocą wymiernych wykładników.	$W = \frac{(x^2)^{-1} \cdot (\sqrt{x})^3}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2}$ $W = \frac{x^{-2} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}}$

Skracamy wyrażenie przez x^{-2} – wspólny czynnik licznika i mianownika. Dzielimy potęgi o tych samych podstawach – odejmujemy ich wykładniki.	$W = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = x^1 = x$

ODPOWIEDŹ: C

ZADANIE 3

Zmieszano x kilogramów a-procentowego roztworu soli kuchennej z y kilogramów roztworu b-procentowego. Iluprocentowy jest otrzymany roztwór?

A. $\frac{xa+yb}{x+y}\%$ B. $\frac{xa}{yb}\%$ C. $\frac{xa-yb}{x-y}\%$ D. $\frac{x+y}{a+b}\%$

ROZWIĄZANIE

Niech otrzymany roztwór będzie c-procentowy. Zapisujemy warunek wynikający z treści zadania – zmieszano x kilogramów a-procentowego roztworu soli kuchennej z y kilogramów roztworu b-procentowego.	$xa\% + yb\%$
Masa otrzymanego roztworu wynosi teraz $(x+y)$ kilogramów i roztwór ten jest c-procentowy.	$(x-y)c\%$
Zapisujemy otrzymaną równość.	$xa\% + yb\% = (x+y)c\%$
Wyznaczamy c.	$\frac{xa+yb}{x+y}\%$

ODPOWIEDŹ: A

ZADANIE 4

Cenę towaru podwyższono o $p\%$. Obecnie towar ten kosztuje t zł. Przed obniżką kosztował on:

A. $\frac{100p}{100+t}$ zł B. $\frac{100t}{p-100}$ zł C. $\frac{pt}{100+p}$ zł D. $\frac{100t}{100+p}$ zł

ROZWIĄZANIE

Oznaczmy: x zł – początkowa cena towaru. Zapisujemy równość wynikającą z faktu, że towar zdrożał o $p\%$.	$x+p\%x=t$
Zapisujemy procent w postaci ułamka o mianowniku 100 i z otrzymanej równości wyznaczamy x.	$x+\frac{p}{100}x=t$ $x\left(1+\frac{p}{100}\right)=t$ $x\left(\frac{100+p}{100}\right)=t \ /:\left(\frac{100+p}{100}\right)$ $x=\frac{100t}{100+p}$

ODPOWIEDŹ: D

ZADANIA PODSUMOWUJĄCE

1 Wiadomo, że $x+y=4$ oraz $x\cdot y=3$. Wówczas wartość wyrażenia $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$ równa się:

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{16}{9}$ D. $\frac{1}{16}$

Odpowiedź: C

Teoria strona: 259

2 Wyrażenie $2x^3-x^2-6x+3$ po rozłożeniu na czynniki przyjmuje postać:

A. $x(2x^2-x-6)+3$ B. $(2x-1)(x-3)(x+3)$

C. $(2x-1)(x-\sqrt{3})^2$ D. $(2x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Odpowiedź: D

Teoria strona: 259

3 Pan Kowalski wpłacił z złotych na x-letnią lokatę z oprocentowaniem w skali roku równym $p\%$ i odsetkami naliczanymi co kwartał. Po zakończeniu lokaty stan konta pana Kowalskiego wraz z odsetkami będzie wynosił:

A. $z\left(1+\frac{p}{100}\right)^{4x}$ B. $z\left(1+\frac{p}{400}\right)^{4x}$ C. $z\left(1+\frac{p}{100}\right)^{x}$ D. $z\left(1+\frac{p}{400}\right)^{x}$

Odpowiedź: B

Teoria strona: 289

4 Udowodnij, że liczba $31\cdot5^{2017}+13\cdot5^{2016}-16\cdot5^{2015}$ jest podzielna przez liczbę 103.

Wskazówka: W wyrażeniu przed nawias można wyciągnąć wspólny czynnik 5^{2015}.

Teoria strona: 259

5 Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c jest prawdziwa nierówność:

$$\frac{5}{2}a^2+\frac{5}{2}b^2+\frac{5}{2}c^2\geq 2ab+2bc+2ac$$

Teoria strona: 259

6 Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru x, dla których wyrażenie $W(x)=x^4-81$ ma wartość ujemną.