LOGARYTMY

1. Wprowadzenie do logarytmów

Logarytm wygląda następująco:

b – liczba logarytmowana

$$\log_a b$$

a – podstawa logarytmu

Powyżej zapisany logarytm przeczytamy: "logarytm liczby *b* przy podstawie *a*" lub "logarytm przy podstawie *a* z liczby *b*".

Podamy teraz formalną definicję logarytmu.

Definicja:

Logarytmem liczby ***b*** przy podstawie ***a*** nazywamy taką liczbę ***c***, że ***a*** podniesione do potęgi ***c*** daje liczbę ***b***.

Matematycznie zapiszemy tą definicję tak:

$$\log_a b = c \quad \text{to} \quad a^c = b$$

Zatem żeby obliczyć $\log_a b$, wystarczy odpowiedzieć na pytanie:

Do jakiej potęgi podnieść liczbę a, żeby otrzymać liczbę b?

W poniższej tabelce podamy jeszcze raz definicję logarytmu oraz sposób jego interpretacji.

Jak zapisujemy	Jak czytamy	Jak rozumiemy
$\log_a b$	logarytm liczby *b* przy podstawie *a*	Do jakiej potęgi podnieść liczbę *a*, żeby otrzymać liczbę *b*

Logarytm istnieje tylko wówczas, gdy spełnione są trzy warunki, które często nazywamy **założeniami** lub **dziedziną logarytmu**:

- podstawa logarytmu musi być zawsze liczbą dodatnią, czyli: $a > 0$,
- podstawa jest różna od 1, zatem: $a \neq 1$,
- liczba logarytmowana musi być dodatnia, czyli: $b > 0$.

2. Logarytmy - najważniejsze wzory

Załóżmy, że: $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$. Wówczas zachodzą następujące wzory:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$n \cdot \log_a b = \log_a (b^n) = \log_{\frac{1}{a^n}} b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

3. Obliczanie logarytmów

Metoda liczenia logarytmów

Przypuśćmy, że musimy obliczyć $\log_a b$. Wynik takiego działania oznaczmy sobie przez ***x***.

Zapiszemy więc, że:

$\log_a b = x$ Zgodnie z definicją logarytmu możemy teraz przeformułować to równanie na następujące:

$a^x = b$ Widać zatem, że musimy po prostu ustalić do jakiej potęgi należy podnieść liczbę *a*, żeby otrzymać liczbę *b* (czyli musimy obliczyć *x*). Po wyznaczeniu *x* mamy obliczony nasz logarytm.

Na pierwszy rzut oka powyższa metoda może wydawać się skomplikowana, jednak w rzeczywistości jest bardzo prosta w zastosowaniu.

W celu jeszcze lepszego zapamiętania definicji logarytmu możesz spojrzeć na poniższą **metodę kółka**.
Pozwala ona łatwo zapamiętać, jak przeformułować problem obliczenia logarytmu, na problem znalezienia odpowiedniej potęgi. Zilustrujemy ją na prostym przykładzie:

$$\log_2 8 = x \quad \Longrightarrow \quad 2^x = 8$$

Zaczynamy od dolnej dwójki, następnie idziemy do *x*, a na koniec do dużej 8. Otrzymujemy w ten sposób ciąg liczb: 2, *x*, 8, które następnie zapisujemy w postaci potęgi.

Zadanie 1.
Oblicz $\log_5 5$.

Zadanie 2.
Oblicz $\log_7 1$.

Zadanie 3.
Oblicz $\log_{\frac{1}{3}} 81$

Zadanie 4.
Oblicz $\log_2 \frac{1}{64}$.

Zadanie 5.
Oblicz $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$.

Zadanie 6.
Oblicz $\log_{\sqrt{2}} 8$.

Zadanie 7.
Oblicz $\log_5 \sqrt[3]{5}$.

Zadanie 8.

Oblicz $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{5}$.

Zadanie 9.

Oblicz $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[7]{5}$.

Zadanie 10.

Oblicz $\log_{2\sqrt{2}} 16$.

Zadanie 11.

Oblicz $\log_{\sqrt[3]{3}} 9\sqrt{3}$.

Zadanie 12.

Oblicz $\log_{\frac{1}{2}} 16\sqrt[3]{2}$.

Zadanie 13.

Oblicz $\log_5 125\sqrt{5}$.

Zadanie 14.

Oblicz $\log_{\frac{1}{6}} 36\sqrt[4]{6}$.

Zadanie 15.

Oblicz $\log_{3\sqrt{3}} 81\sqrt[3]{3}$.

Zadanie 16.

Oblicz $\log_{\frac{1}{2}} \frac{256\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

Zadanie 21.

Liczba $2\log_{\frac{1}{5}} 125$ jest równa

A. 6 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -6

Zadanie 22.

Iloczyn $2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$ jest równy

A. -6 **B.** -4 **C.** -1 **D.** 1

Zadanie 23.

Liczba $2\log_3 27 - \log_2 16$ jest równa

A. 2 **B.** -8 **C.** 9 **D.** $\frac{3}{2}$

Zadanie 24.

Liczba $\log_3 \frac{1}{27}$ jest równa

A. -3 **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 3

Zadanie 25.

Liczba $\log_2 4 + 2\log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Zadanie 26.

Liczba $\left(\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}\right)^4$ jest równa

A. 12 B. 6 C. 9 D. 81

Zadanie 27.

Suma $\log_8 16+1$ jest równa

A. $\log_8 17$ B. 32 C. 73 D. 3

Zadanie 28.

Liczba $c=\log_3 2$. Wtedy

A. $c^3=2$ B. $3^c=2$ C. $3^2=c$ D. $c^2=3$

4. Dodawanie i odejmowanie logarytmów

Dwa logarytmy o takiej samej podstawie możemy dodać korzystając ze wzoru:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$$

Z bardzo podobnego wzoru skorzystamy, gdy chcemy odjąć logarytmy o wspólnej podstawie:

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

Przykłady:

$$\log_2 2 + \log_2 8 = \log_2 (2 \cdot 8) = \log_2 16 = 4$$

$$\log_2 2 - \log_2 8 = \log_2 \frac{2}{8} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \log_6 36 = 2$$

$$\log_6 12 - \log_6 3 = \log_6 \frac{12}{3} = \log_6 4$$

$$\log_3 54 + \log_3 2 = \log_3 (54 \cdot 2) = \log_3 108$$

$$\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 \frac{54}{2} = \log_3 27 = 3$$

Zadanie 1.

Oblicz $\log_6 3 + \log_6 12$.

Zadanie 2.

Oblicz $\log_8 32 + \log_8 2$.

Zadanie 3.

Oblicz $\log_2 4 + \log_2 8$.

Zadanie 4.

Oblicz $\log 25 + \log 40$.

Zadanie 5.

Oblicz $\log_5 50 - \log_5 2$.

Zadanie 6.
Oblicz $\log_2 24 - \log_2 3$.

Zadanie 7.
Oblicz $\log_3 36 - \log_3 4$.

Zadanie 8.
Oblicz $\log 300 - \log 3$.

Zadanie 9.
Liczba $\log 100 - \log_2 8$ jest równa

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Zadanie 10.
Liczba $2 - 2\log_2 3$ jest równa

A. 0 **B.** $\log_2 \frac{2}{9}$ **C.** $\log_2 \frac{4}{9}$ **D.** $\log_2 \frac{2}{3}$

Zadanie 11.
Liczba $-\frac{3}{2}\log 4 + \frac{5}{3}\log 8$ jest równa:

A. $2\log 2$ **B.** $\log 24$ **C.** 2 **D.** $8\log 2$

Zadanie 12.
Liczba $\log_3 27 - \log_3 1$ jest równa

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Zadanie 13.
Suma $\log_4 2 + \log_4 32$ jest równa

A. $\log_4 14$ B. $\log_{16} 48$ C. 3 D. 4

Zadanie 14.
Liczba $\log_4 8 + \log_4 2$ jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\log_4 6$ **D.** $\log_4 10$

Zadanie 15.
Liczba $\log 24$ jest równa:

A. $2\log 2 + \log 20$ **B.** $\log 6 + 2\log 2$ **C.** $2\log 6 - \log 12$ **D.** $\log 30 - \log 6$

Zadanie 16.
Liczba $\log_2(\log 20 + \log 5)$ jest równa

A. 5 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie 17.
Liczba $\log_3 21$ - $\log_3 7$ jest równa

A. 14 B. $\log_3 14$ C. 0 D. 1

Zadanie 18.
Liczba $\log_5 10$ + $\log_5 2{,}5$ jest równa

A. 1 B. 2 C. 5 D. $\log_5 \frac{25}{2}$

Zadanie 19.
Liczba $\log_2 100$ - $\log_2 50$ jest równa

A. $\log_2 50$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\log_2 5000$

Zadanie 20.
Wartość wyrażenia 12log315−log35√ jest równa:

A. -1 B. $\log_3 3\sqrt{5}$ C. 12 D. 1

5. Różne zadania z logarytmów

Zadanie 1.
Wiadomo, że $\log_{0,5} x = -1$. Zatem:

A. $x = -2$ B. $x = -\frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x = 2$

Zadanie 2.
Liczba log12 jest równa

A. $\log 3 \cdot \log 4$ **B.** $\log 3 + \log 4$ **C.** $\log 16 - \log 4$ **D.** $\log 10 + \log 2$

Zadanie 3.
Liczba log6 jest równa

A. $\log 2 \cdot \log 3$ B. $\frac{\log 2}{\log 3}$ C. $\log 2 + \log 3$ D. $\log 2 - \log 3$

Zadanie 4.
Wiadomo, że $a = 3\log_8 4$, zatem a jest równe

A. 512 B. 81 C. 2 D. 64

Zadanie 5.
Liczba log36 jest równa

A. $2\log 18$ B. $\log 40 - 2\log 2$ C. $2\log 4 - 3\log 2$ D. $2\log 6 - \log 1$

Zadanie 6.
Wyrażenie $\log_4(2x - 1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

A. $x \leq \frac{1}{2}$ **B.** $x > \frac{1}{2}$ **C.** $x \leq 0$ **D.** $x > 0$